

## НАМИРАНЕ РАВНИННИТЕ СЕЧЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧНИ ТЕЛА И ПОСТРОЯВАНЕ НА РАЗГЪВКИ НА ПОВЪРХНИНТЕ ИМ

Александрина И. Банкова<sup>1</sup>, Татяна М. Димитрова<sup>2</sup>, Гинка В. Жечева<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Технически Университет - Варна  
Катедра „Индустириален Дизайн“

<sup>2</sup> Технически Университет - Варна -  
„Колеж в структурата на Технически  
университет - Варна“

<sup>3</sup> Технически Университет - Варна  
Катедра „Индустириален Дизайн“

---

**РЕЗЮМЕ** — В настоящата статия е изследван процеса на намиране равнинните сечения на ръбести геометрични тела чрез начините за построяване на точки на повърхнини. Анализирани и решени са задачи за намиране на линиите за взаимно пресичане на геометрични обекти - призми, като е приложен метода на спомагателните секущи повърхнини. На базата на получените сечения е направена разгъвка на околната повърхнина.

**Ключови думи:** взаимно пресичане, повърхнина, построяване, призми, равнинни сечения, ръбести тела

---

## FINDING PLANE SECTIONS GEOMETRIC UNITS AND CONSTRUCTION OF UNFOLDS OF THEIR SURFACES

Aleksandrina Bankova<sup>1</sup>, Tatjana Dimitrova<sup>2</sup>, Ginka Gecheva<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Technical University of Varna  
Department of Industrial Design

<sup>2</sup> Technical University of Varna  
„College structure of the Technical  
University of Varna“

<sup>3</sup> Technical University of Varna  
Department of Industrial Design

---

**ABSTRACT**— This article has studied the process of finding lowland sections of angular geometric bodies through how to build points of surfaces. Analyzed and solved the task of finding a mutually crossing lines of geometric objects - prisms, by applying the method of auxiliary secant surfaces. On the basis of the obtained sections is made unfolding of the surrounding surface.

**Keywords:** each intersection, surface construction, prisms, flat sections, angular bodies

---

### 1. ВЪВЕДЕНИЕ

Реалните тела обикновено са изградени от части на геометрични тела. При изобразяването им се получават ограничаващи линии на взаимно пресичане и контури [Сандалки, Д. (2006)1]. Най – голям интерес при изобразяването на повърхнини и тела представляват линиите като сечения и повърхнини. Тези линии са от съществено значение за някои технически приложения, когато се търсят формата и размерите на повърхнините, например построяване на разгъвки [Йорданова С. (2003)]. Много често ръбовете получени

от пресичане на тела се изобразяват приблизително. Най – голяма точност при построяване на линиите на взаимно пресичане се изисква в случаите на изработване на разгъвките на околните повърхнините [Гришель Р., Шнейдеров Е. (2014), Белавина Т. (2014)].

Ръбестите и ротационни тела, които се пресичат по различни начини са едни от най – приложимите в инженерната практиката. Стремехът при проектирането им е те да се сведат до частно положение в чертежите. По този начин задачата значително се улеснява.

Съществуват обаче случаи в инженерното проектиране при които равнината е в общо положение, което значително усложнява задачата. Използваните методи за решаването на такива задачи са различни и могат да бъдат „Метод принадлежност на точка към права“, „Метод на спомагателните равнини през една права“, „въртене на равнина“, чрез въвеждане на помощни проекционни равнини (трансформация), както и използване на главни прави, успоредни равнини и др. [Сенигов Н. (2006) ].

От направените проучвания и анализи се установи че, една от най- трудните и същевременно най – често използваните за решаване задачи по дисциплината дескриптивна геометрия е пресичането на ръбести тела с равнина в общо положение, намиране на истинската големина на сечението и съответно построяването на разгъвка на околната повърхнина на телата. За определянето на равнинните сечения на всяко от геометричните тела – призми, пирамиди, кръгови конуси е необходимо да се определят повърхнините от които е съставено тялото [Николова И. (2006)].

Целта на настоящата статия е изследване процеса на построяване и намиране равнинните сечения на ръбести геометрични тела чрез начините за построяване на точки на повърхнини. На базата на получените сечения да се направят разгъвки на повърхнините им.

За достигане на целта са поставени следните задачи:

- ✓ построяване проекциите на ръбесто тяло – призма по зададени параметри;
- ✓ построяване на сеченията на наклонена призма с равнина в общо положение, зададена с две пресичащи се прави;
- ✓ построяване на права призма с равнина в общо положение, зададена с дири си;
- ✓ построяване сечението на призма с права;
- ✓ построяване взаимното пресичане на тела;

## 2. МЕТОДИ ЗА ПОСТРОЯВАНЕ СЕЧЕНИЯТА НА РЪБЕСТИ ТЕЛА

Ръбеста повърхнина представлява повърхнина, съставена от равнинни многоъгълници. Тези многоъгълници се наричат стени, техните страни – ръбове, а върховете им - върхове на повърхнината.

Изобразяването на геометричните телата включва:

- ✓ построяване на проекции по зададени параметри;
- ✓ анализ на готовите проекции – посочване на контурите спрямо всяка проекционна равнина;
- ✓ проекции на ръбове;
- ✓ ос и видимост;
- ✓ построяване на трета проекция по зададени две;
- ✓ построяване на проекции на точки от повърхнината на тялото;

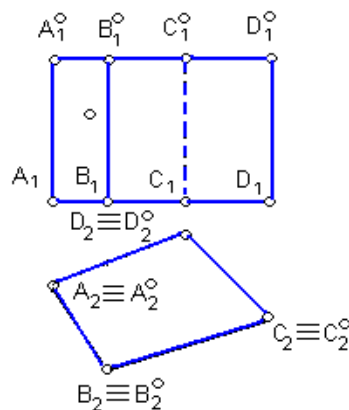
На базата на изброените по – горе стъпки за изобразяване проекциите на тела са построени правоъгълните проекции на ръбесто тяло призма по зададени координати на точката.

На фиг.1 е изобразена права призма, с ръбове перпендикулярни на хоризонталната проекционна равнина. Построява се хоризонталната проекция на основата, която е в истинска големина –  $A_2B_2C_2D_2$ . Фронталната проекция е отсечка –  $A_1B_1C_1D_1$ .

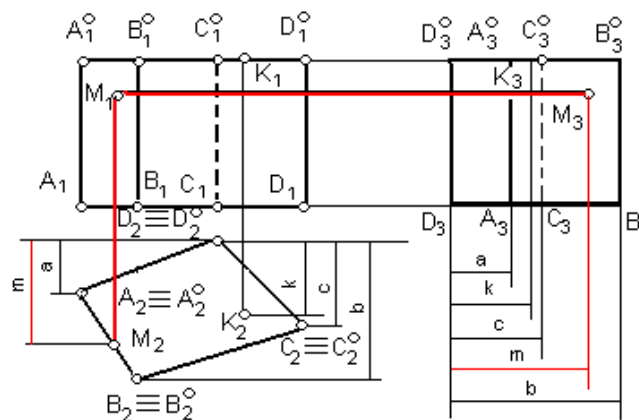
Околните ръбове на призмата са отсечки които са перпендикулярни на основата от което следва, че имат фронтална проекция в истинска големина и хоризонтална проекция точка. На дадената фигура са означени с  $AA^\circ, BB^\circ, CC^\circ, DD^\circ$ .

От анализа на двете проекции следва, че контура на тялото спрямо фронталната равнина е пространствения многоъгълник  $ABCC^\circ B^\circ A^\circ$ . Призмата има две видими и две невидими стени върху  $\pi_1$ . Околния ръб  $DD^\circ$  е невидим. Стените са правоъгълници наклонени спрямо равнината  $\pi_1$  и проектиращи спрямо равнината  $\pi_2$  (с хоризонтални проекции отсечки).

За построяване на произволна точка  $M$  (фиг. 2) от лявата предна видима стена е достатъчно съответните проекции на точките да лежат върху проекциите на стената. Построяването на профилната проекция започва от построяване на проекцията на основата, която е отсечка с дължина  $b$ . Крайните точки на проекцията са върховете  $B$  и  $D$ . От фигурата се вижда, че ръбовете  $BB^\circ$  и  $DD^\circ$  са от контура спрямо проекционната равнина  $\pi_3$ . Построяват се вътрешните ръбове  $AA^\circ$  - видим върху  $\pi_3$  и  $CC^\circ$  - невидим. Профилната проекция на точка  $M$  е върху профилната проекция на стената, върху която лежи. За построяването и се използва хоризонтална ординала; от хоризонталната ординала се отчита нейната относителна ординала  $m$ . Точката  $M$  е видима върху  $\pi_3$ .



Фиг. 1. Проекции на призма по зададени параметри



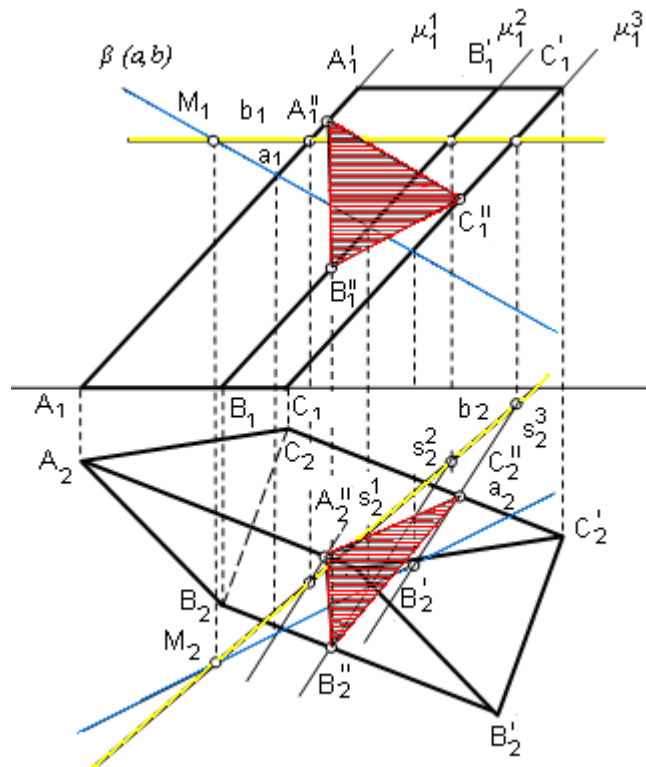
Фиг. 2. Проекции на точка

След построяването на проекциите на призмата можем да намерим равнинното сечение на тялото. За намиране на сечението са анализирани построенията на права и наклонена призма с равнина в общо положение.

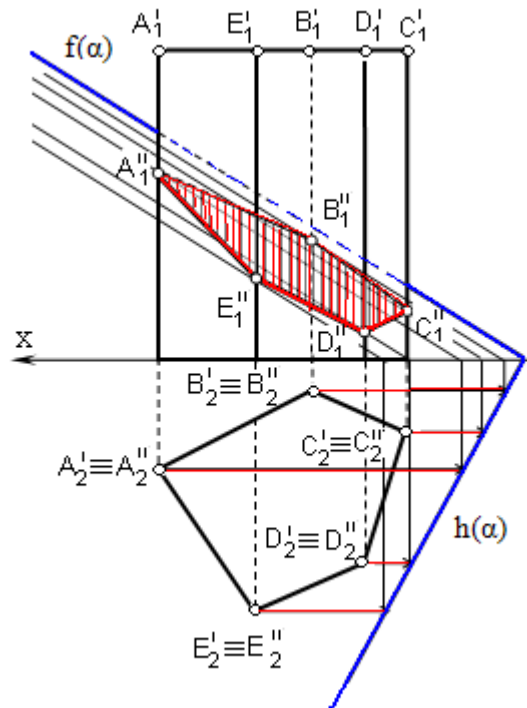
На фиг.3 е илюстрирано сечението на наклонена призма с равнина  $\beta$ , зададена с двете пресичащи се прави  $a$  и  $b$ . Сечението на равнината на призмата се построява като се намерят сеченията на трите околни ръба със секущата равнина  $\beta$ . За тази цел се използват трите спомагателни секущи равнини  $\mu^1, \mu^2$  и  $\mu^3$  инцидентни с околните ръбове и проектиращи спрямо  $\pi_1$ . Построени са хоризонталните проекции на  $s_2^1, s_2^2$  и  $s_2^3$  на сеченията на спомагателните равнини с  $\beta$ . Първата проекция на сечението се намира като се използва инцидентността на върховете на сечението със съответните околните ръбове.

На фиг. 4 е дадено сечението на права призма с основа  $\pi_2$  с равнина в общо положение, зададена с дирите си.

В случая околната повърхнина на призмата е проектираща спрямо хоризонталната проекционна равнина, от където следва, че проекцията на сечението съвпада с проекцията на основата на призмата в  $\pi_2$ . За намиране на сечението в  $\pi_1$  са използвани фронтални прави от равнината  $\alpha$ , чиито проекции в  $\pi_2$  са успоредни на оста  $x_{1,2}$  и преминават през околните ръбове.



Фиг. 3. Равнинно сечение на наклонена призма



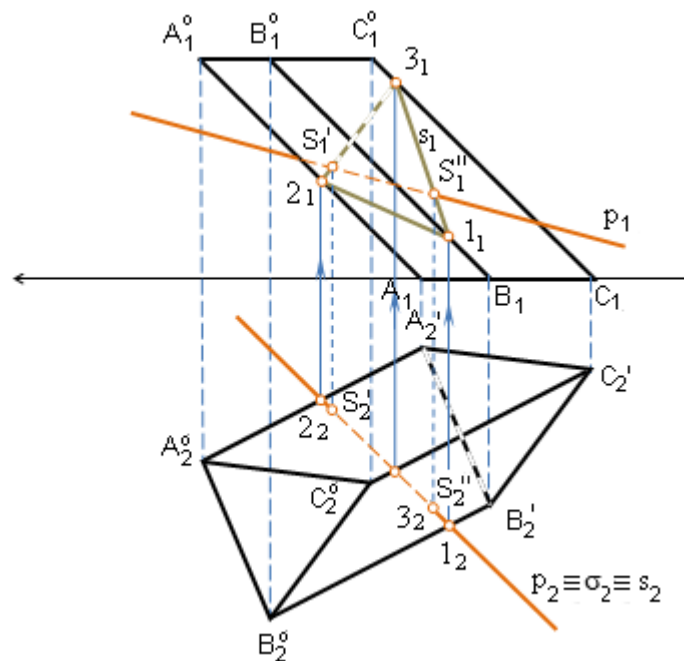
Фиг. 4. Сечение на права призма с равнина, зададена с дири

*Намиране равнинното сечение на на призма с права*

За построяване равнинното сечение на призма с права е приложена проектираща спомагателна секуща равнина.

Когато се използва спомагателна проектираща секуща равнина минаваща през зададена права, проекцията на сечението на спомагателната равнина и повърхнината в съответната проекционна равнина е права съпадаща с проекцията на зададената права. Сложността на решението зависи от сложността на построяването на другата проекция на сечението. Нека да разгледаме пресичане на ръбесто тяло – наклонена триъгълна призма  $ABCA^\circ B^\circ C^\circ$  пресечена с правата  $p$  (фиг.5).

Използваме спомагателна секуща равнина  $\sigma \perp \pi_2, \sigma \supset p$ . Равнината  $s$  пресича повърхнината на призмата в  $\Delta 123$  на която хоризонталната проекция е отсечка  $1_2 2_2 3_2 \subset p_2$  и се слива с  $\sigma_2$ ,  $\Delta 123 \cap p$  в точките  $S'$  и  $S''$ . Това са точките в които правата пробжда триъгълната призма.



Фиг. 5. Сечение на призма с права

#### Взаимно пресичане на повърхнини и тела. Разгъвки

За построяване на линиите на взаимно пресичане се използват различни методи в зависимост от вида на пресичащите се повърхнини и взаимното им положение [Неделчева П. (1998)]. От съществено значение е положението на повърхнините спрямо проекционните равнини при избора на метод за определяне на линиите на взаимно пресичане. Както беше споменато по-горе в практиката, независимо от възможността да се приложи някой метод за построяване на линиите на взаимно пресичане на повърхнини произволно разположени спрямо проекционните равнини се търси предварително частно положение на едната или на двете повърхнини. Това дава възможност за намаляване обема на построенията и повишава точността на чертежа [Bankova A. (2015)].

Преди да разглеждат на пример за намиране на линиите за взаимно пресичане ще изложим най-общия метод [Банкова А., (2014)] (метода на спомагателните секущи повърхнини) за намиране на линиите на взаимно пресичане на повърхнини който се състои в следното (фиг.6):

- ✓ построяват се серия от спомагателни секущи повърхнини равнини или сфери, които пресичат едновременно двете разглеждани повърхнини в така наречените лесни сечения;
- ✓ намират се равнинни сечения на всяка от спомагателните (повърхнини или равнини) със двете разглеждани повърхнини;
- ✓ намират се проекциите на пресечните точки на всеки две сечения, получени с помощта на една секуща равнина;
- ✓ съединяват се получените точки от всички използвани спомагателни секущи повърхнини, като се следи за правилния ред на свързване;
- ✓ определя се видимостта на линията на пресичане, а след това и видимостта на самите повърхнини;

Видими ще бъдат тези части от линията на пресичане, които са получени от видимите части и на двете разглеждани повърхнини.

Описания общ метод за намиране на линиите на взаимно пресичане на повърхнини и тела е известен като метод на спомагателните секущи повърхнини



Фиг. 6. Метод на спомагателни секущи равнини

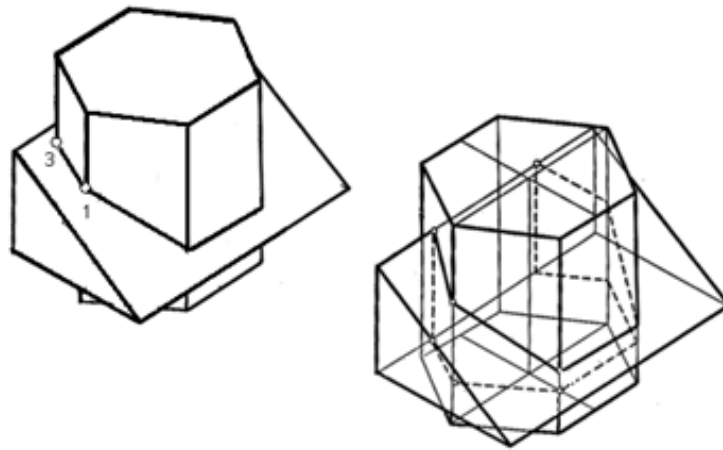
#### Взаимно пресичане на призми

При анализиране на дадената фигура 7 се вижда, че повърхнините на правите призми се пресичат в пространствен многоъгълник, страните на който са ръбове получени от пресичането на стените им. Страната 1-3 се получава от пресичането на наклонената стена на триъгълната призма и лявата предна стена на шестоъгълната призма. Точките 1 и 3 са точки, в които ръбовете на вертикалната стена пробожда наклонената стена на триъгълната призма.

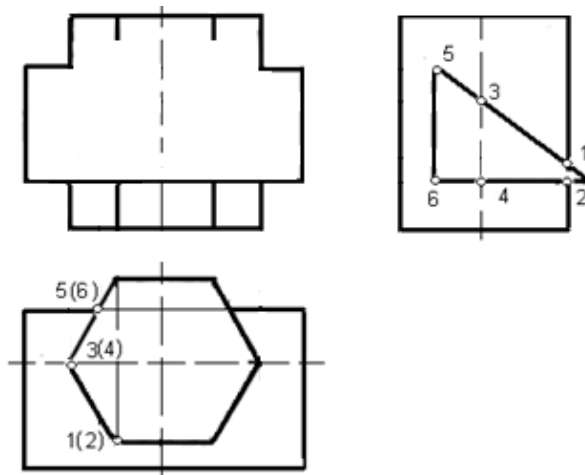
На фиг.8 са дадени основните проекции на призмите. И двете призми имат проектиращи околни повърхнини. Шестоъгълната призма е със стени перпендикулярни на хоризонталната проекционна равнина. Хоризонталните проекции на тези стени образуват правилен шестоъгълник. Триъгълната призма е със стени перпендикулярни на профилната проекционна равнина. Профилната проекция на стените на триъгълната призма е триъгълник. Профилната проекция на линията на взаимно пресичане е частта от този триъгълник, която лежи върху проекцията на вертикалната призма.

За да се построят проекциите на линията на взаимно пресичане е необходимо да се намерят върховете и. Всеки връх лежи върху някой ръб на призмите, следователно проекциите на върховете лежат върху съответните проекции на ръбовете на призмите: Точките 1 и 2 лежат върху ляв вертикален ръб. Фронталната проекция на точката 1 се построява с хоризонтална ординала: точките 3 и 4 лежат върху най – левия вертикален ръб. Фронталната проекция на точката 3 се получава с хоризонтална ординала: точката 5 лежи върху горния хоризонтален ръб. Фронталната и проекция е построена с вертикална ординала: точката 6 лежи върху долния хоризонтален ръб. Фронталната и проекция е получена със същата вертикална ординала. Означенията на невидимите проекции на точките 5 и 6 са в скоби. Което означава, че те лежат върху невидимите стени на призмите. Построените точки са върхове на лявата част на линията на взаимно пресичане. Върховете отдясно са симетрично разположени. Построените проекции на всички върхове от линията на взаимно пресичане се свързват последователно: 1 – 3- 5 - 6 и т.н. ръбовете 3-5 и 5-6 са невидими, тъй - като са от невидими стени (фиг.9). Построеното тяло се състои от две призматични части – хоризонтална и вертикална, стените на които се пресичат взаимно.

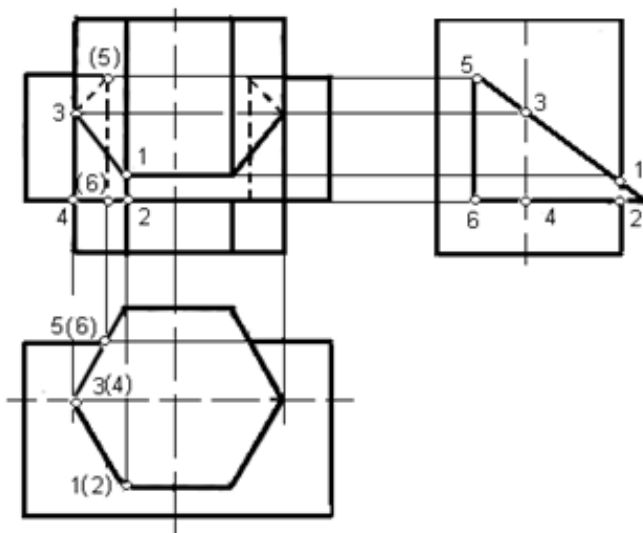
На фиг.10 е дадено тяло в прорез. Извършените построения могат да се използват за да се изобрази шестостенно тяло с хоризонтален прорез, получен чрез „пробиване” с триъгълна призма. Линията на взаимно пресичане е начупен ръб на прореза. Проекциите на това тяло са построени, след като хоризонталната призма се премахне от тялото.



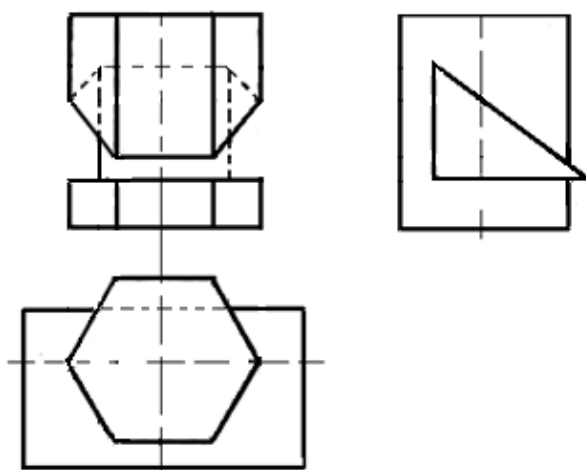
Фиг. 7. Взаимно пресичане на призми



Фиг. 8. Основни проекции на призми



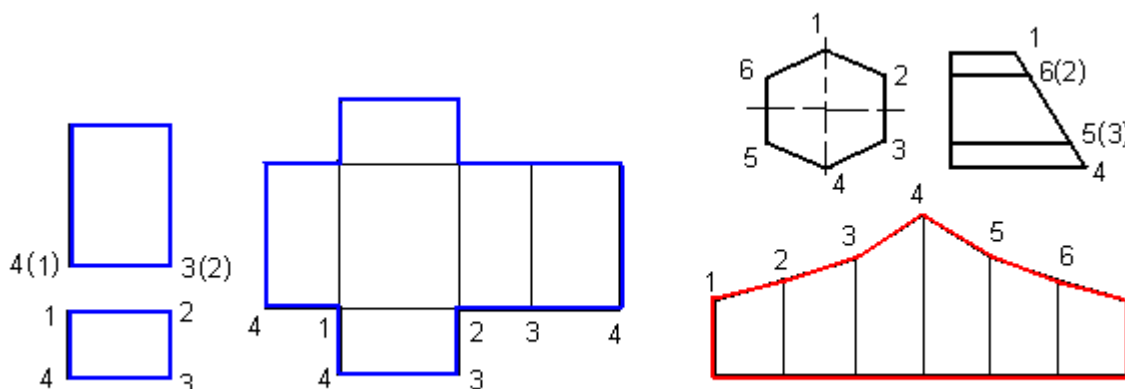


**Фиг. 9.** Линии на взаимно пресичане**Фиг. 10.** Тяло в прорез*Разгъвки на ръбести тела*

Разгъвката представлява равнинна фигура, която се получава от дадена повърхнина чрез огъване без разтегляне. Повърхнината, от която е получена такава равнинна фигура се нарича разгъваема. Разгъваеми са всички ръбести повърхнини както и цилиндричните и коничните [Артемьева Я. (2004)].

Построяването на разгъвките има голямо приложение за изработване на тела от листов материал. Самата разгъвката, изпълнена в мащаб 1:1 се използва за еталон. За построяване на разгъвките са използвани правоъгълните проекции на околните повърхнините. Тъй като разгъвката е равнинна фигура е намерена истинската големина на равнинната фигура.

*Разгъвка на права призма* (фиг.11). Стените на правата призма са правоъгълници, на които едната страна има хоризонтална проекция в истинска големина, тъй като основата на призмата е успоредна на хоризонталната проекционна равнина. Другата страна на стената е околна на призмата, който е успореден на фронталната проекционна равнина. Разгъвката се състои от още шест правоъгълника. На същата фигура 11 е дадена разгъвка на околната повърхнина на призма с наклонена горна основа. Фронталните проекции на околните ръбове са в истинска големина. Точките 1,2,3,..., и т.н. са върхове на наклонената основа. Ако е необходима разгъвка на пълната повърхнина, е трябва да се намери истинската големина на тази основа.



Фиг.11. Разгъвка на околната повърхнина на призма

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

От направеното в статията проучване относно изследване процеса на построяване и намиране равнините сечения на ръбести геометрични тела могат да се направят следните изводи:

- Построени са правоъгълните проекции на ръбесто тяло призма по зададени координати на точката.
- Намерено е равнинното сечение на тялото - права и наклонена призма с равнина в общо положение. Анализирани са методите на построение при наклонената призма, зададена с двете пресичащи се прави и права призма, зададена с дирите си.
- От извършените построения се обобщава, че ръбеста повърхнина представлява повърхнина, съставена от равнинни многоъгълници.
- Равнинното сечение на геометрично тяло е равнинна фигура, която от една страна може да се приложи като отделно изображение и от друга като част от изображение на тяло в чертежа.
- Правоъгълната проекция на тяло е фигура, ограничена от проекцията на контура на повърхнината на тялото спрямо проекционната равнина. Формата на контура зависи от вида на повърхнината и положението му спрямо проекционната равнина.
- Ако секуща равнина е наклонена спрямо проекционната равнина, проекцията на сечението върху тази равнина не е в истинска големина.
- За намиране на истинската големина на равнинно сечение освен метода на смяна на проекционните равнини (по – известен в дескриптивната геометрия като единична и двойна трансформация) и метода на ротация могат да се използват проекциите на отделни елементи на сеченията.
- Правоъгълната проекция на произволна повърхнина се получава като сечение на множество прави, които проектират точките на повърхнината и проекционната равнина.
- Видът на линиите на взаимно пресичане на тела зависи от вида на повърхнините, които се пресичат и от тяхното взаимно положение.

### 4. ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

Сандалски, Д., Горанов П. и др. (2006). Приложна геометрия и инженерна графика. София, стр. 73.

Йорданова С., (2003). Проекционни методи в инженерната графика. Варна, стр. 42 -53.

Николова И., (2006). Ръководство за упражнения и курсови работи по Приложна геометрия и инженерна графика, София.

Неделчева П., (1998). Ръководство по Приложна геометрия и инженерна графика – част - I. Габрово, 21 – 45.

Банкова А. (2014). Намиране линията на пресичане на геометрични тела. Особени случаи на пресичане на ротационни повърхнини, Сп. МТТ, 51-54.

Bankova A. (2015). Methodology for construction of planes section of units in the method of planes auxiliary sekula. Conic sections, //Fourteenth international conference on electrical machines, drives and power systems “Elma 2015”- Varna /ISSN 1313-4965, p. 295-297

Гришель Р., Шнейдеров Е. (2014). Пособие начертательная геометрия и инженерная графика – Минск: БГУИР, 12-25.

Артемьева Я., Лубченко А., Махова С., Ярмолович В (2004). Начертательная геометрия и инженерная графика: Учеб.-метод. комплекс для студ. ПГУ, 120-144

Белавина Т., Золотонос Я. (2014). Инженерная графика. Курс начертательной геометрии: учеб.-метод. пособие: Изд-во Казанск. гос. архитектур.-строит. ун-та, 15-45.

Сенигов Н., Гусятникова Т., Ларионова Н. и др. (2006) Начертательная геометрия: Учебное пособие – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 45-80 с.