

ИЗСЛЕДВАНЕ ПАРАМЕТРИТЕ НА НАКЛОНЕНИ КРЪГОВИ И РОТАЦИОННИ КОНУСИ. ВЛИЯНИЕ НА НАКЛОНА ВЪРХУ ГЕОМЕТРИЧНАТА ИМ ФОРМА

Зоя Д. Цонева

Технически Университет - Варна
Катедра „Индустиален Дизайн“
zoya_tsoneva@abv.bg

РЕЗЮМЕ — В статията са разгледани характерните особености на съществуващите два вида конуси – кръгови и ротационни, и е направен паралел между тях. Проучени са измененията настъпващи в някои от параметрите им при изменение на наклона на коничната повърхнина към равнината в която лежи основата им.

Проведени са изследвания върху формата и размерите им имащи отношение към напречното сечение, промяна местоположението на осите на конусите и числения эксцентрицитет.

Ключови думи: наклонени кръгов и ротационен конус, ортогонално проектиране

STUDY PARAMETERS OBLIQUE CIRCULAR AND ROTARY CONE. INFLUENCE OF THE SLANT ONTO THE GEOMETRIC SHAPE

Zoya Tsoneva

Technical University of Varna
Department of Industrial Design
„Studentska“ Str. №1, Varna, Bulgaria
zoya_tsoneva@abv.bg

ABSTRACT— The article discussed the specifics of the existing two types of cones - circular and rotary, and drew a parallel between them. They studied the changes occurring in some of their parameters change in the slope of the conical surface to the plane in which lies their base.

Studies were conducted on the shape and dimensions related to the cross-sectional area, changing the location of the axes of the cones and the numerical eccentricity.

Keywords: oblique rotation and circular cone, orthogonal design

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Много често в практиката освен правите конуси, които се наричани още и ротационни се срещат и наклонени такива.

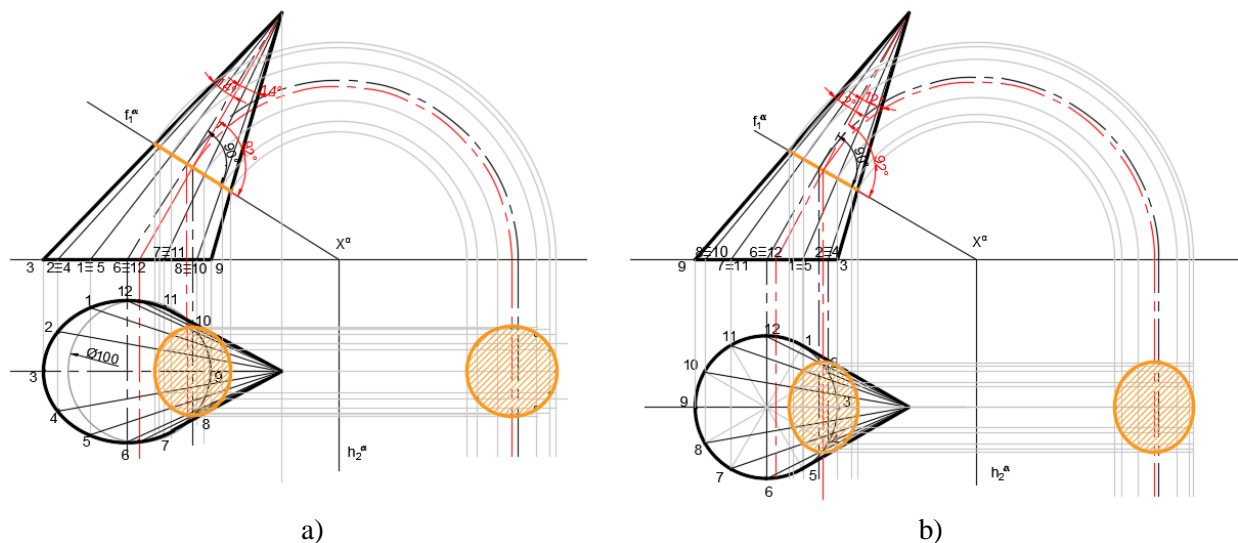
Наклонените конуси от своя страна се разделят на два вида – кръгови, чиито напречно сечение е елипса, и ротационни, чиито напречно сечение е окръжност. Често студентите не правят разлика между тях, поради незадълбоченото познаване на специфичните особености

при различните видове конични повърхнини и произлизащите от тях тела.

Целта на настоящата статия е да сравни и насочи вниманието към характерните особености във формата на конусите, които биха имали значение при проектиране на конични елементи от тела, разположени в общо или частно положение, спрямо проекционната равнина. Да се разграничат съществуващите видове оси при наклонените конуси, и как те се държат при различен наклон на двата вида конични повърхнини. Изследван е и числения ексцентрицитет на елиптичните сечения при наклонения кръгов конус, както и при основата на ротационния.

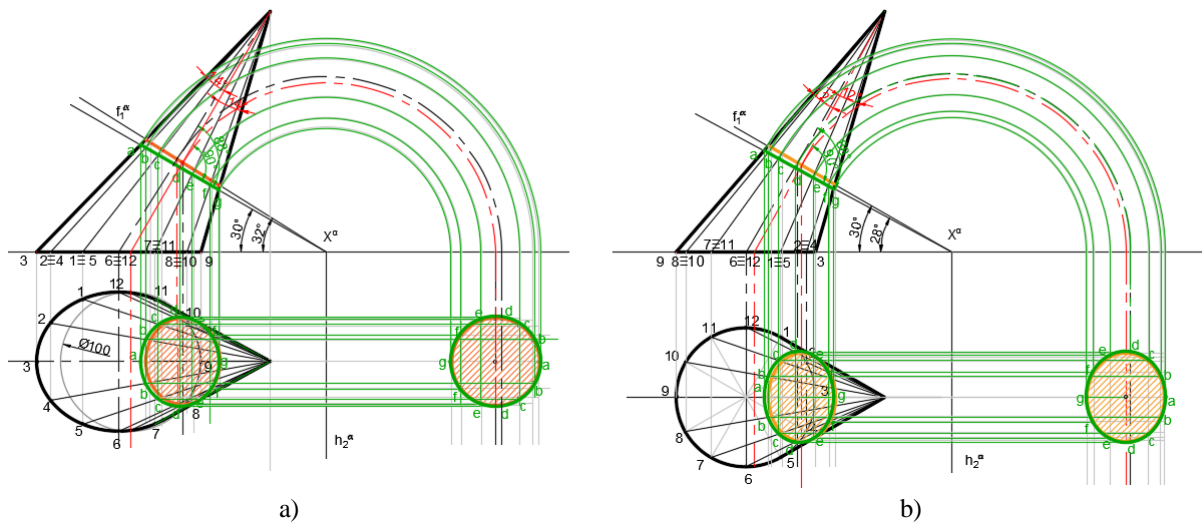
2. ИЗЛОЖЕНИЕ

На фиг. 1 е представено пресичане на наклонени ротационен и кръгов конуси, пресечени с равнина, разположена в частно положение. Намерени са напречните им сечения. Очевидно е, че при ротационния конус сечението е окръжност, а при кръговия конус сечението е елипса. Секущата равнина указваща напречното сечение е разположена перпендикулярно към оста на тялото, спусната от върха му към центъра на управителната крива при основата на конуса (в черно). Чрез „метод въртене“ на секущата равнина, е намерена истинската големина на сечението. Трябва да се обърне внимание, че и при двете сечения, оста на тялото не съвпада с оста на симетрия на телата (отбелязана в червено). Именно тя минава през центъра на напречното сечение и това добре се вижда на чертежа, както при намирането на истинската големина на сечението, така и в първата проекция, където е очевидно, че тя е и бисектриса към върха на наклонените конуси.



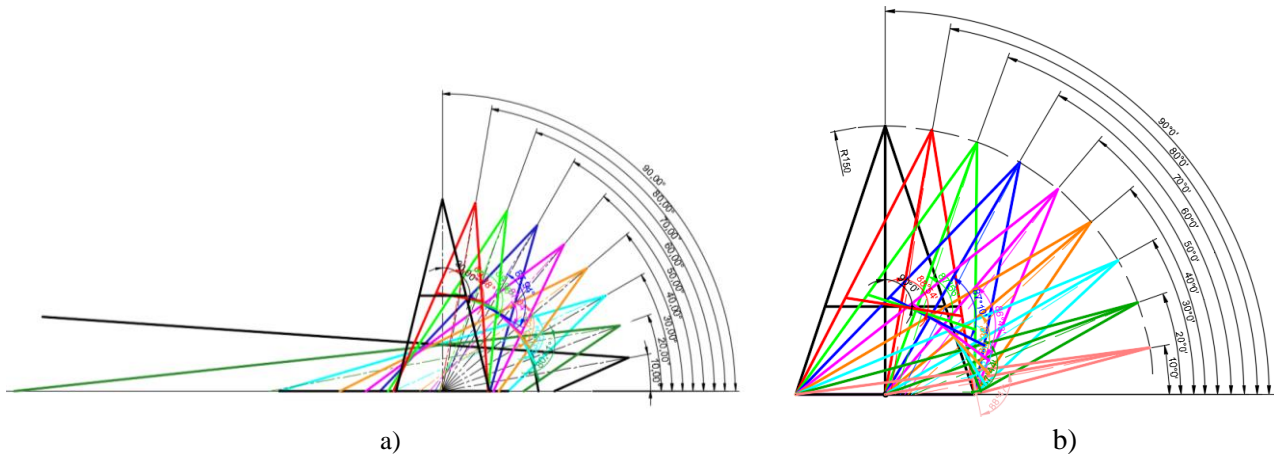
Фиг. 1. Напречно сечение на наклонен ротационен конус а); и наклонен кръгов конус б).

В такъв случай ако измерим ъгъла сключен между „оста на симетрия“, явяваща се и бисектриса към върха на тялото, и сечението определено от дирята на равнината, ще се окаже, че той вече не е 90^0 , а 92^0 . Поради това се налага да се извърши следната корекция: равнината определяща напречното сечение е преместена така, че дирята на новата секуща равнина, да сключва прав ъгъл, този път с оста на симетрия на тялото (в червено). Самото преместване е представено на фиг. 2 в зелено. Новата фронтална диря на равнината се премества с около 2^0 . При сечението е добре показано, че оста на симетрия на тялото минава точно през центъра на напречното си сечение. И в двата симулирани случая, ъгълът, който новото напречно сечение сключва с „оста на тялото“ е 88^0 , и 90^0 спрямо „оста на ротация“. Така построеното напречно сечение е вече коректно представено.



Фиг. 2. Корекция при намиране на напречно сечение при наклонен ротационен конус а);
и наклонен кръгов конус б).

Какви изменения и промени възникват при различни наклони на двата вида конуси е симулирано на фиг. 3



Фиг. 3. Измерване на ъгъла между напречното сечение и: „оста на тялото“ при ротационен конус а);
и „оста на симетрия“ при кръгов конус б).

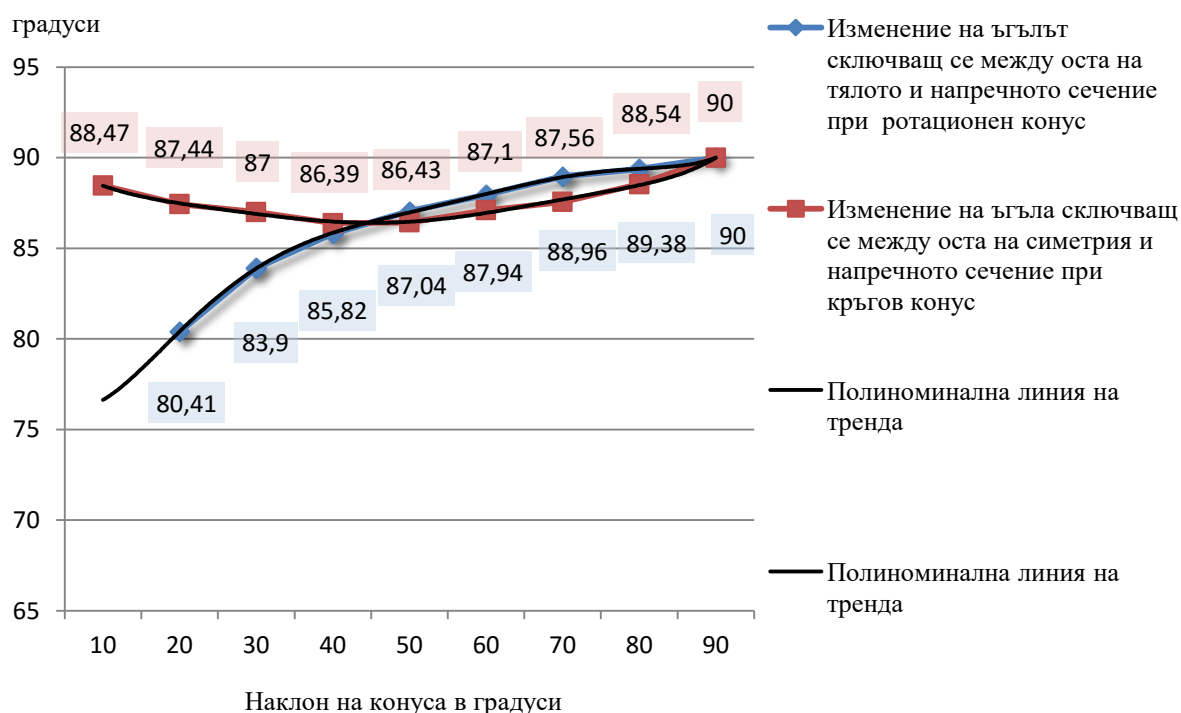
На фиг.3а е показано пресичането на *ротационен конус* с равнина, като са направени измервания през 10^0 при накланяне на тялото. Равнината при всички случаи е разположена на едно и също разстояние от върха на тялото и винаги е перпендикулярна на „оста на ротация“, явяваща се и „ос на симетрия“. Измерено е как се изменя ъгълът сключващ се между „оста на тялото“ и напречното му сечение. Резултатите са представени в табличен вид в таблица 1. Построена е и графика представена на фиг.4. Промени в размерите на напречното сечение при различни наклони на ротационния конус не се наблюдават.

На фиг. 3б е представено пресичането на *кръгов конус* с равнина, разположена отново на едно и също разстояние от върха на конуса и перпендикулярна към „оста на симетрия“ на тялото при различните наклони на кръговия конус. Тук „оста на симетрия“ не може да се нарече и „ос на ротация“, както при ротационния конус, тъй като получаващото се напречно сечение е елипса. Резултатите от измерванията на ъгълът сключващ се между

оста на симетрия и напречното сечение при *кръгов конус* (в градуси) са представени в табличен вид в таблица 1 и графично отново на фиг.4.

Таблица 1

Наклон на конуса в градуси	Ъгъл склучващ се между оста на тялото и напречното сечение при <i>ротационен конус</i> в градуси [⁰]	Ъгъл склучващ се между оста на симетрия и напречното сечение при <i>кръгов конус</i> в градуси [⁰]
90	90 ⁰ 00'	90 ⁰ 00'
80	89 ⁰ 38'	88 ⁰ 54'
70	88 ⁰ 96'	87 ⁰ 56'
60	87 ⁰ 94'	87 ⁰ 10'
50	87 ⁰ 04'	86 ⁰ 43'
40	85 ⁰ 82'	86 ⁰ 39'
30	83 ⁰ 90'	87 ⁰ 00'
20	80 ⁰ 41'	87 ⁰ 44'
10	-	88 ⁰ 47'



Фиг. 4. Отношение на изменението на ъгъла между напречното сечение и „оста на тялото“ при ротационен конус; и ъгъла между напречното сечение и „оста на симетрия“ при кръгов конус.

Изместване на която и да е от споменатите три вида оси спрямо напречното сечение в градуси при прав *ротационен конус* не се наблюдава (т.е. ъгъла остава 90⁰), но с промяна на наклона ъгълът между оста на конуса и напречното сечение, перпендикулярно на „оста на ротация“ нараства прогресивно, като при наклон на тялото от 20⁰ достига стойност 80⁰ 41', а при наклон на тялото 10⁰, изобщо не може да се измери, тъй като част от коничната повърхнина на симулацията, изобщо не се пресича с равнината в която лежи основата на обследваното конично тяло. Това е видно на фиг. 3а, както и на графиката построена на

фиг. 4. Построена е и полиномиалната линия на тренда, като за по-голяма точност е използвана шеста степен на подреждане. Уравнението на диаграмата за *ротационен конус* има вида:

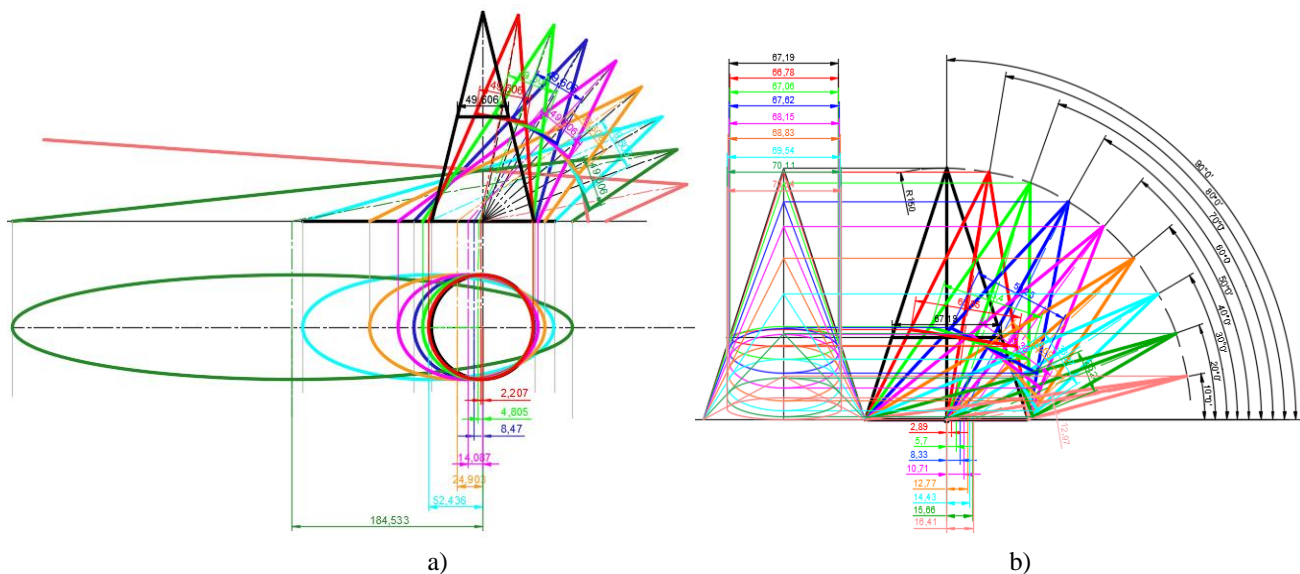
$$y=0.0015x^6-0.0463x^5+0.5651x^4-3.3627x^3+9.616x^2-8.6635x+78.521 \quad (1)$$

като коефициентът на детерминация $R^2=1$, което говори за една *много висока корелация* при изменението на ъгълът склучващ се между оста на тялото и напречното сечение, при ротационните конуси.

Изместване на „осите на тялото“ в градуси при прав *кръговия конус* отново не се наблюдава (ъгъла остава 90^0), но с промяна на наклона ъгълът между „оста на тялото“ и сечението перпендикулярно на „оста на симетрия“, се променя и достига максимум от $86^041'$ при наклон на тялото от 45^0 , след което големината на ъгъла на изместване отново започва да се покачва, като при наклон на кръговия конус клонящ към 0^0 , отново достига стойност от 90^0 . На фиг. 4, се вижда добре хиперболичната форма на графиката (в червено). Построена е и полиномиалната линия на тренда с подреждане от шеста степен. Уравнението на диаграмата за *кръгов конус* има вида:

$$y=0.0007x^6-0.0198x^5+0.2202x^4-1.1935x^3+3.4248x^2-5.6291x+91.659 \quad (2),$$

а коефициентът на детерминация $R^2=0,9941$, което говори за отново за *много висока корелация* при изменението на ъгълът склучващ се между „оста на тялото“ и напречното сечение при *кръговите конуси*.



Фиг.5. Изследване промяната на местоположението на оста при ротационна а); и кръгова б) конични повърхнини. Изследване на изменението на размерите на малката и голямата ос на елиптичното сечение при кръговия цилиндър.

На фиг. 5 е представено измерването на изместването (движението) на оста при основата на конусите в милиметри. Резултатите са представени в таблица 2.

Таблица 2

Наклон на конуса в градуси	Изместване на оста на тялото при основата на ротационен конус	Изместване на оста на симетрия при основата на кръгов конус	Изменение на размерите на малката ос на елиптичното сечение на кръгов конус	Изменение на размерите на голямата ос на елиптичното сечение на кръгов конус
90	0	0	67.19	67.19
80	2,207	2,89	65.85	66.78
70	4,805	5,70	63.4	67.06
60	8,47	8,33	59.25	67.62
50	14,087	10,71	53.36	68.15
40	24,903	12,77	45.69	68.83
30	52,436	14,43	36.27	69.54
20	184,533	15,66	25.24	70.11
10	∞	16,41	12.97	70.54

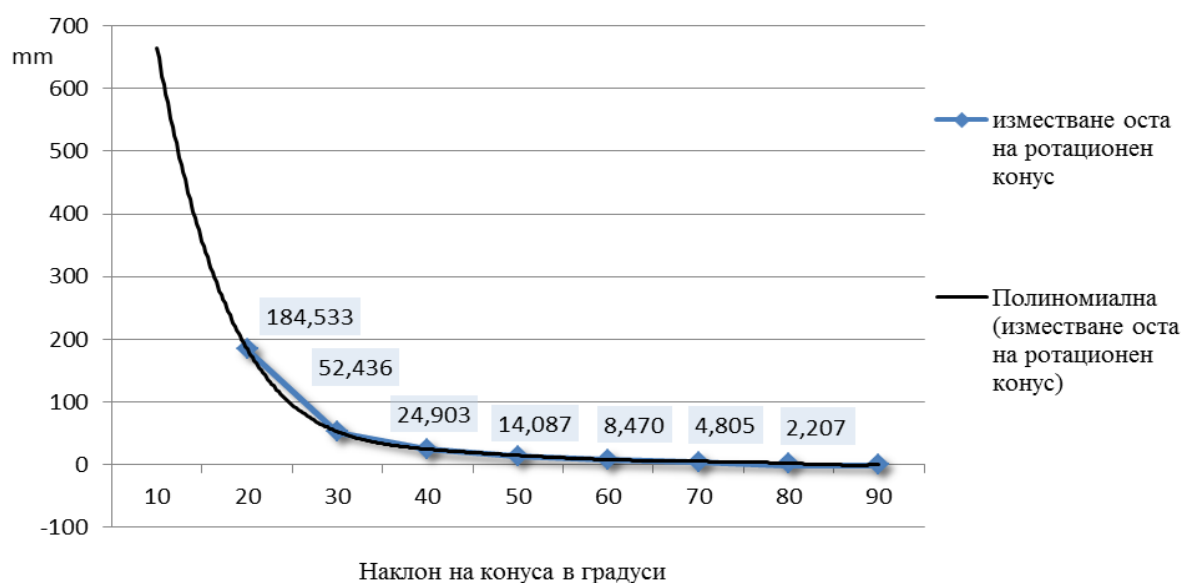
От измерванията са построени две графики.

На фиг. 6 е показана зависимостта на изместването на *оста на тялото* спрямо наклона при *ротационния конус*. Вижда се, че с увеличаване на наклона на тялото „оста на ротация“ запазва местоположението си и е статична, за разлика от „оста на тялото“, чието изместване се увеличава в геометрична прогресия, а малко след двадесетия градус нарастването вече клони към безкрайност. Преместването на „оста на тялото“ е в посока обратна на наклона на коничната повърхнина.

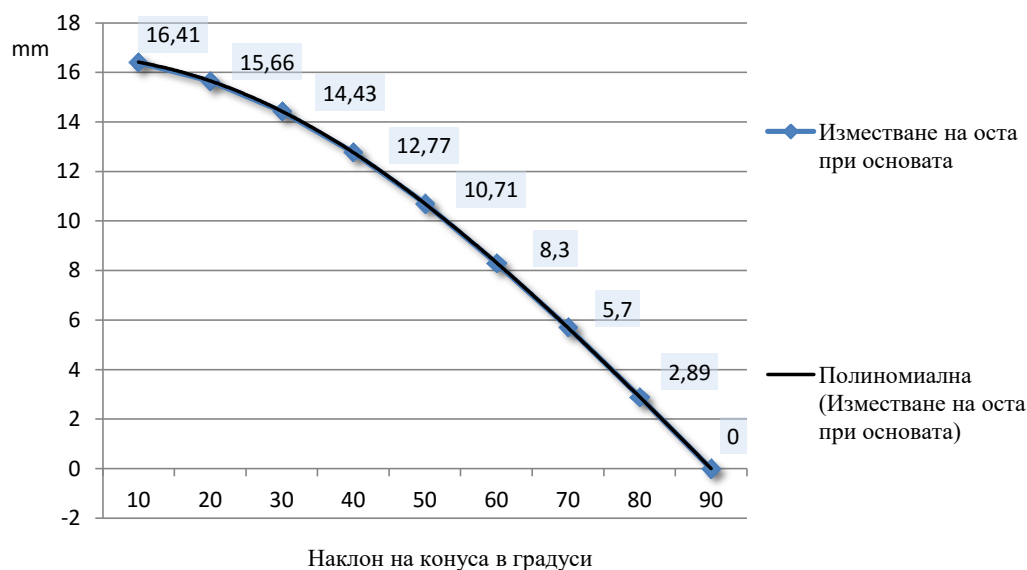
Представена е и полиноминалната линия на тренда, а уравнението на диаграмата има вида:

$$y = 0.0458x^6 - 1.6906x^5 + 25.545x^4 - 202.26x^3 + 887.29x^2 - 2059.7x + 2015.2 \quad (3)$$

Коефициента на детерминация $R^2=1$, което говори за много висока корелация между двете променливи - изместването на „оста на тялото“ и наклона на коничната повърхнина при *ротационен конус*.



Фиг.6. Зависимост при изместване на „оста на тялото“ спрямо наклона на ротационна конична повърхнина



Фиг. 7. Зависимост при изместване на „оста на симетрия“ спрямо наклона на кръгова конична повърхнина

На фиг. 7 е представена построената от данните от измерването графика, на зависимостта на преместване на „оста на симетрия“ при *кръгов конус*, спрямо наклона на коничната повърхнина на тялото. От визуализацията на фиг. 5b са вижда, че *оста на тялото* остава стационарна, а преместване има само при „оста на симетрия“. Преместването на *оста на симетрия* е по посока на наклона на тялото.

Построена е и полиномиалната линия на тренда с подреждане от шеста степен. Уравнението на диаграмата за *кръгов конус* има вида:

$$y = 2E-06x^6 - 0.0002x^5 + 0.0036x^4 - 0.0228x^3 - 0.1717x^2 - 0.1272x + 16.729 \quad (4)$$

Коефициентът на детерминация $R^2=1$, което говори за *много висока корелация* при зависимостта на изместване на „оста на симетрия“ спрямо наклона на кръгова конична повърхнина.

Докато сечението на правия и наклонения ротационни конуси запазва размерите и формата си при разположение на напречното сечение на едно и също разстояние от върха на конуса, то при кръговите конуси се наблюдава изменение на размерите, и по малката, и при голямата ос на елиптичното сечение. Такова измерване е направено при фиг. 5b. Получените резултати са представени в таблица 2. Резултатите от измерванията са представени и в графичен вид на фиг. 8.

От построената графика могат да се направят изводи, че при едно и също разстояние на сечението от върха на коничната повърхнина на тялото, при различни наклони на кръгов конус, се наблюдават следните изменение: докато малката ос на елиптичното сечение, намалява с увеличаване на наклона на конуса в рамките на 19,3%, то при голямата ос се забелязва, не, очакваното намаляване, а леко увеличение на размера на сечението в рамките на около 5%.

Построена е и полиномиалната линия на тренда с подреждане от шеста степен. Уравнението на диаграмата за изменение на малката ос на елиптичното сечение при *кръгов конус* има вида:

$$y = 0.0002x^6 - 0.007x^5 + 0.0835x^4 - 0.5347x^3 + 1.0613x^2 + 11.773x + 0.5944 \quad (5)$$

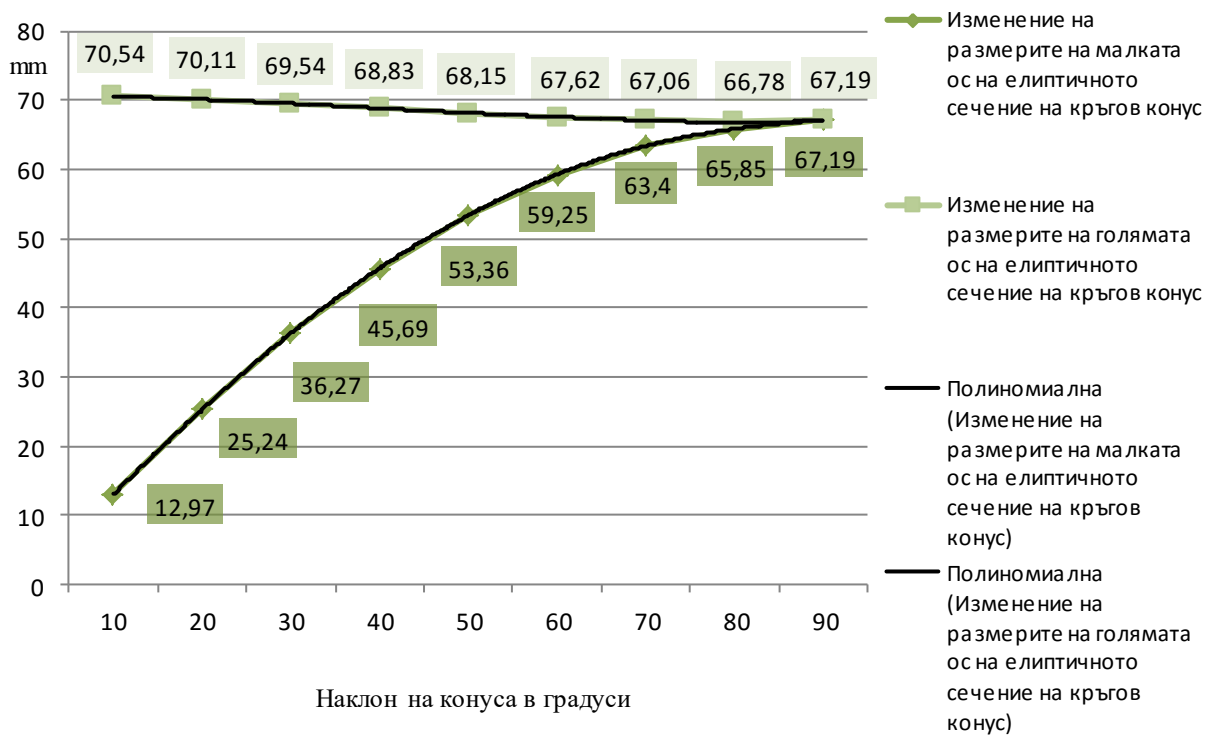
Коефициентът на детерминация $R^2=1$

Уравнението на диаграмата за изменение на голямата ос на елиптичното сечение при кръгов конус има вида:

$$y = 0.0002x^6 - 0.006x^5 + 0.0615x^4 - 0.2946x^3 + 0.6191x^2 + 0.9691x + 071.128 \quad (6)$$

Коефициентът на детерминация $R^2=0.9999$

И двата коефициента на детерминация говорят отново за *много висока корелация* между осите на елиптичното сечение и наклона на коничната повърхнина при кръгов конус.



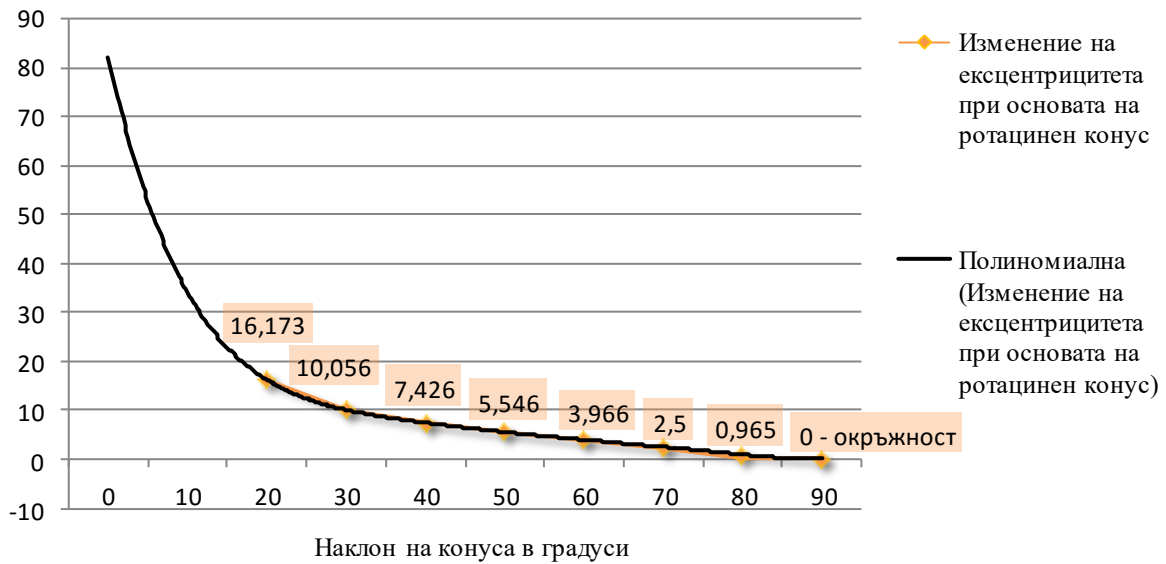
Фиг. 8. Изменение на размерите на елиптичното сечение в зависимост от наклона на тялото, при кръгов конус

От получените данни е изчислен и представен в таблица 3, *числения эксцентрицитет* на елиптичното сечение при кръговия конус. В същата таблица е представени и числения эксцентрицитет при основата на ротационния конус.

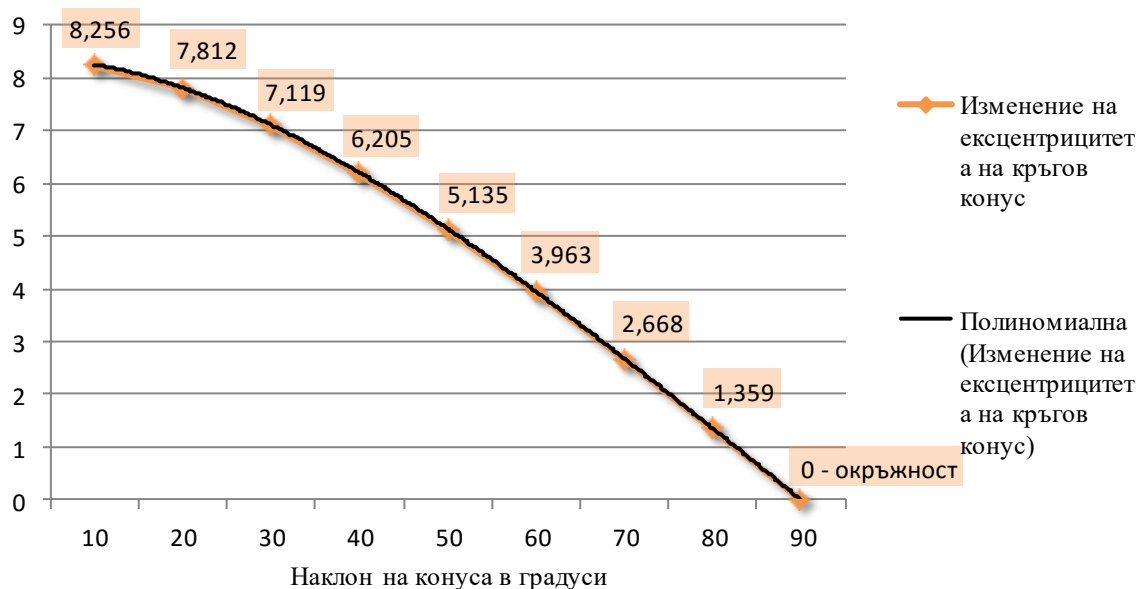
Таблица 3

Наклон на конуса в градуси	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Числен эксцентрицитет при основата на ротационен конус	∞	16,17	10,05	7,426	5,546	3,966	2,500	0,965	0
Числен эксцентрицитет при напречното сечение на кръгов конус	8.256	7.812	7.119	6.205	5.135	3.963	2.668	1.359	0

От данните представени в таблица 3 са построени две графики - фиг.9 и фиг. 10, показващи съответно изменението на ексцентрицитета при основата на ротационния конус и при елиптичното напречно сечение на кръгов конус. И при двете графики се вижда, че когато конусите са прави, т.е. осите им сключват 90° с основата на тялото, ексцентрицитета е 0, което означава, че двата фокуса на сеченията елипси се сливат, а формата е окръжност. В този случай, осите на симетрия, ротация и осите на телата съвпадат. В този частен случай, разлика между кръгов и ротационен конус няма.



Фиг. 9. Изменение на числения ексцентрицитет при основата на ротационен конус



Фиг. 10. Изменение на числения ексцентрицитет при напречното сечение на кръгов конус

Построени са и полиномиалните им линии на тренда с подреждане от шеста степен. Уравнението на диаграмата за изменение на числения ексцентрицитет при основата на ротационен конус има вида:

$$y = 0.002x^6 - 0.0807x^5 + 1.3595x^4 - 12.115x^3 + 60.436x^2 + 162.48x + 194.82 \quad (7)$$

Уравнението на диаграмата за изменение на числения эксцентрицитет при напречното сечение на кръгов конус има вида:

$$y = -9E-06x^6 + 0.0003x^5 - 0.0033x^4 + 0.0278x^3 - 0.2359x^2 + 0.1139x + 8.3528 \quad (8)$$

Коефициентът на детерминация и при двете уравнения е $R^2=1$. Те говорят за *много висока корелация* между числения эксцентрицитет и елиптическите форми при основата и сечението.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ:

От направеното в статията проучване могат да се направят следните изводи:

1. Напречното сечение на наклонен *кръгов конус* е елипса. Наклона на коничната повърхнина и напречното сечение са в корелационна зависимост.

2. При едно и също разстояние на напречното сечение от върха на коничната повърхнина, при различни наклони на *кръгов конус* се наблюдават следните изменение: докато малката ос на елиптическото сечение, намалява с увеличение на наклона на конуса в рамките на 19,3%, то при голямата ос се забелязва леко нарастване на размера на сечението в рамките приблизително на 5%.

3. Сечението при прав и наклонен *ротационни конуси* запазва размерите и формата си.

4. С промяна на наклона при *кръгов конус*, ъгълът между „оста на тялото“ и сечението се променя като намалява, и достига изместване максимум до $86^{\circ}41'$ при наклон на тялото от 45° , след което ъгъла на изместване отново започва да се покачва, като при наклон на кръговия конус клонящ към 0° , отново достига стойност от 90° . Представената графика е с хиперболична форма.

5. С промяна на наклона при *ротационен конус*, ъгълът между „оста на тялото“ и сечението перпендикулярно на „оста на ротация“ нараства прогресивно, като при наклон на тялото от 20° , спрямо равнината в която лежи основата на коничната повърхнина, достига отклонение от $80^{\circ}41'$, а при 10° , клони към безкрайност.

6. С промяната на наклона при *кръговия конус оста на тялото остава стационарна*, а преместване съществува само при „оста на симетрия“, която с увеличаване на наклона на тялото се премества по посока на наклона му.

7. С промяна на наклона на *ротационния конус*, *оста на ротация запазва местоположението* си, за разлика от „оста на тялото“, чието изместване се увеличава в геометрична прогресия, а малко след двадесетия градус нарастването вече клони към безкрайност. Преместването на „оста на тялото“ е в посока обратна на наклона на коничната повърхнина.

8. При графиките визуализиращи эксцентрицитета се вижда, че когато и двата вида конуси са прави, т.е. осите им сключват 90° с основата на тялото, эксцентрицитета им е 0, което означава, че двата фокуса на сеченията елипси се сливат, а формата на сечението е окръжност. В този случай, „оста на симетрия“, „оста на ротация“ и „оста на тялото“ съвпадат, а разлика между *кръгов и ротационен конус* няма.

9. Колкото по-голям е наклона на *ротационния конус*, толкова по-голяма е стойността на эксцентрицитета на елиптическата основа, като след двадесетия градус стойността клони към безкрайност.

10. Колкото по-голям е наклона на *кръговия конус*, толкова по-голяма е стойността на эксцентрицитета на елиптическото сечение. При 90° двата фокуса на елиптическото сечение се сливат и елипсата се превръща в окръжност.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

- [1] Petrov D. (1971) *Descriptive Geometry*, Sofia, publishing house „Technology“, УДК 515 (075.8);
- [2] Uzunov N. Petrov G. Dimitrov S. (1963) *Descriptive Geometry*, Sofia, Part 1, Tehnika Publishing House, volume No 341/I-4;
- [3] Корелационен анализ <https://bg.wikipedia.org/wiki>